Prof. Dr. Alfred Toth

Zur Abbildung von Peanozahlen auf Relationalzahlen

1. In Toth (2019a) hatten wir uns gefragt, was denn eine Relation zur semiotischen Relation macht. Nun hatte zwar Bense (1981, S. 17 ff.) das Zeichen als triadische Relation über Primzeichen oder Zeichenzahlen eingeführt

$Z = (1, 2, 3)$

und die Isomorphie der Zeichenzahlen mit den Peanozahlen bereits in Bense (1975, S. 167 ff.) aufgezeigt, allein, während die Peanozahlen die Folge

$P = (1, 2, 3, ..., n)$

bilden, bilden die Relationalzahlen eine ganz andere Folge

$Z = (1, ((1, 2), (1, 2, 3)), (1, ((1, 2), ((1, 2, 3), (1, 2, 3, 4))), ...),$

insofern

$2 := (1 \rightarrow 2)$

$3 := (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$, usw.

definiert sind. Bense (1979, S. 53) hatte das wie folgt dargestellt:

$ZR(M, O, I) =$

$ZR(M, M \rightarrow O, M \rightarrow O \rightarrow I) =$

ZR(mon. Rel., dyad. Rel., triad. Rel.)

ZR(.1., .2., .3.) =

1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3
			2.1	2.2	2.3	2.1	2.2	2.3
						3.1	3.2	3.3

„Mit dieser Notation wird endgültig deutlich, daß Repräsentation auf Semiotizität und Semiotizität auf Gradation der Relationalität beruht“ (Bense 1979, S. 53). Man darf somit eine semiotische Relation als eine gradative Relation definieren. Und da somit gilt

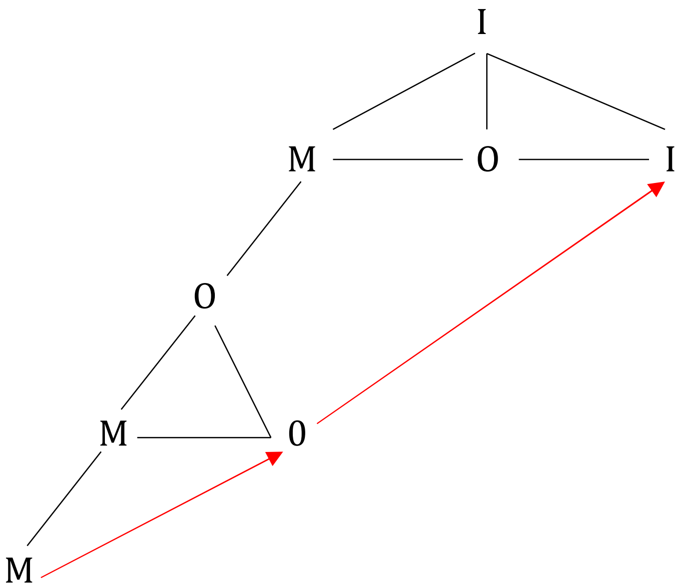
$Z = (1, 2, 3) = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))),$

ist Z also eine Relation, die sich selbst und alle ihre Teilrelationen enthält. Als selbstreflexive Relation kann sie allerdings nur mittels einer Mengentheorie beschrieben werden, für die das Fundierungsaxiom nicht gilt (vgl. Aczel 1988).

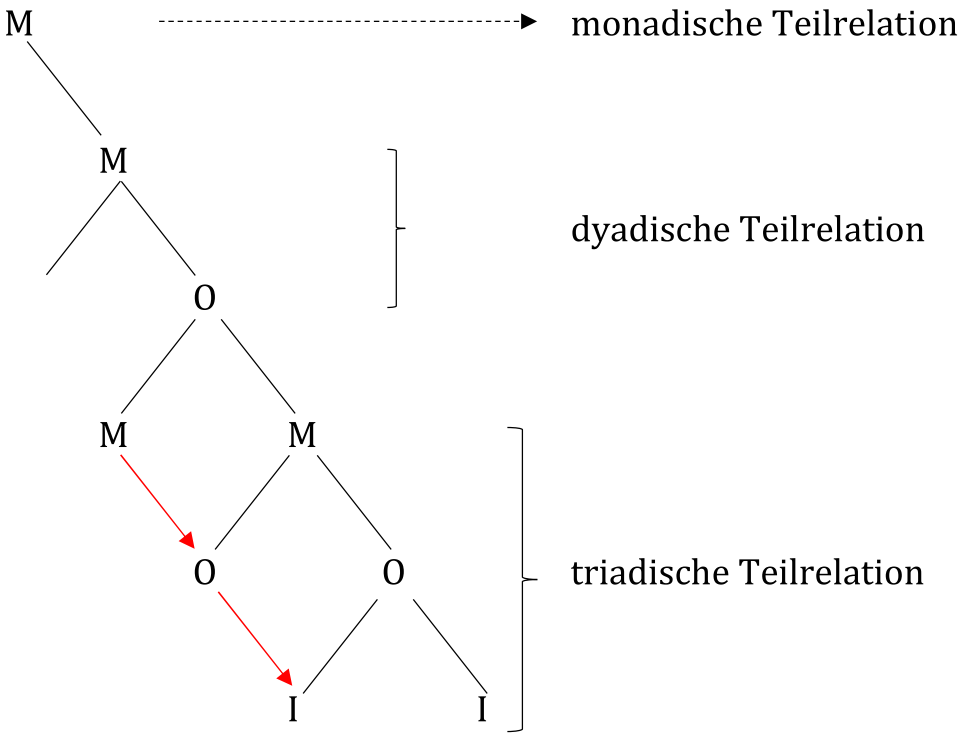
2. Graphisch läßt sich die relationalzahlige Relation

$Z = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$

durch



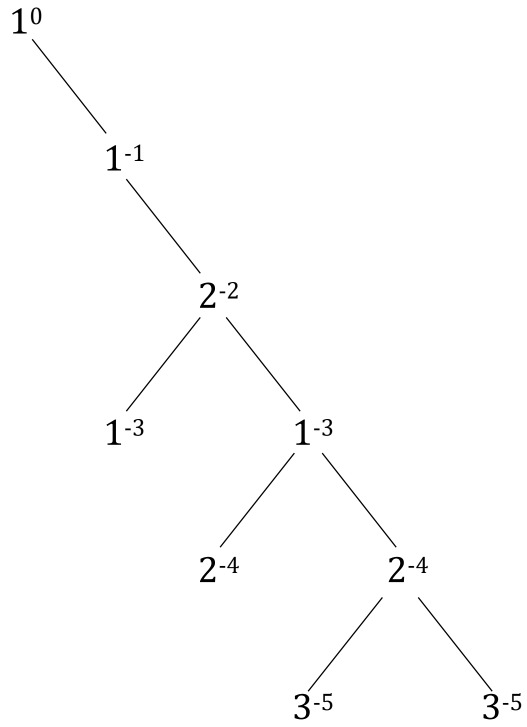
darstellen. Man kann diesen Graph leicht in eine Baumableitung verwandeln, indem man mit der Kategorie M als Kopf der Ableitung beginnt.



Wenn man nun die semiotischen Kategorien auf die Peircezahlen abbildet

$Kat(sem) \rightarrow P = (M, O, I) \rightarrow (1, 2, 3)$,

dann erhält man den folgenden semiotischen Baum mitsamt den Einbettungsstufen



Z läßt sich damit in der Form von Relationalzahlen (R) redefinieren (vgl. Toth 2019b)

$Z = ((1^0, 1^{-1}, 1^{-3}), (2^{-2}, 2^{-4}), 3^{-5})$.

Für jede Peircezahl P gilt also $P = f(R)$. Damit werden aber Lücken in der M-Zahlenfolge durch Zahlen aus den O- und I-Folgen geschlossen:

	M	O	I
0	1		
-1	1		
-2	←	2	
-3	1		
-4	←	2	
-5	←	←	3

Mit der Abbildung von Peanozahlen und Relationalzahlen geht also eine Rechtsmehrdeutigkeit einher, welche zwar auf Kosten der mathematischen Präzision geht, gleichzeitig aber ein zusätzliches Moment der kategorialen

Freiheit schafft. (Entsprechendes ist aus der Mathematik der Qualitäten bekannt, vgl. Kronthaler 1986, S. 60.):

Peanozahl		Relationalzahl
(1.1)	→	$(1^0, 1^0), (1^0, 1^{-1}), (1^0, 1^{-3})$
		$(1^{-1}, 1^0), (1^{-1}, 1^{-1}), (1^{-1}, 1^{-3})$
		$(1^{-3}, 1^0), (1^{-3}, 1^{-1}), (1^{-3}, 1^{-3})$
(1.2)	→	$(1^0, 2^{-2}), (1^0, 2^{-4})$
		$(1^{-1}, 2^{-2}), (1^{-1}, 2^{-4})$
		$(1^{-3}, 2^{-2}), (1^{-3}, 2^{-4})$
(1.3)	→	$(1^0, 3^{-5})$
		$(1^{-1}, 3^{-5})$
		$(1^{-3}, 3^{-5})$
(2.1)	→	$(2^{-2}, 1^0), (2^{-2}, 1^{-1}), (2^{-2}, 1^{-3})$
		$(2^{-4}, 1^0), (2^{-4}, 1^{-1}), (2^{-4}, 1^{-3})$
(2.2)	→	$(2^{-2}, 2^{-2}), (2^{-2}, 2^{-4})$
		$(2^{-4}, 2^{-2}), (2^{-4}, 2^{-4})$
(2.3)	→	$(2^{-2}, 3^{-5})$
		$(2^{-4}, 3^{-5})$
(3.1)	→	$(3^{-5}, 1^0), (3^{-5}, 1^{-1}), (3^{-5}, 1^{-3})$
(3.2)	→	$(3^{-5}, 2^{-2}), (3^{-5}, 2^{-4})$
(3.3)	→	$(3^{-5}, 3^{-5})$

Die Relationszahlen ohne Einbettungsgrad lassen sich im folgenden Zahlendreieck darstellen (OEIS A002260)

```
                          1
                        1   2
                      1   2   3
                    1   2   3   4
                  1   2   3   4   5
                1   2   3   4   5   6
              1   2   3   4   5   6    7
            1   2   3   4   5   6   7    8
          1   2   3   4   5   6   7    8    9
        1   2   3   4   5   6   7   8    9   10
      1   2   3   4   5   6   7   8    9   10   11
    1   2   3   4   5   6   7   8   9    10   11   12
  1   2   3   4   5   6   7   8   9   10   11   12   13
1   2   3   4   5   6   7   8   9   10   11   12   13   14
```

Durch die Mehrdeutigkeit der monadischen Teilrelationen werden natürlich auch die durch Konkatenation aus ihnen erzeugbaren dyadischen und triadischen Teilrelationen mehrdeutig, vgl. etwa das relationalzahlige Äquivalent der eigenrealen Zeichenklasse:

$(3.1, 2.2, 1.3) \quad \rightarrow \quad ((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{0}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-1}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-2}, 2^{-2}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-2}, 2^{-4}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-4}, 2^{-2}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{0}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{-1}, 3^{-5})$

$((3^{-5}, 1^{-3}), \quad (2^{-4}, 2^{-4}), \quad (1^{-3}, 3^{-5})$

Man kann unschwer absehen, welcher riesige Strukturreichtum innerhalb der Zeichentheorie eröffnet wird durch den Wechsel von den Peanozahlen zu den Relationalzahlen. Geht man von relationalen Verbänden aus und untersucht etwa die Übergänge und Schnittstellen zwischen diesen den Zeichenklassen zugeordneten relationalen Feldern, dann ergeben sich Netzwerke von bisher nie gesehener Komplexität.

Literatur

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Semiotik als Theorie gradativer Relationalität. Tucson, AZ 2019 (= 2019a)

Toth, Alfred, Theorie der Relationalzahlen. Tucson, AZ 2019 (= 2019b)

25.1.2021